λ-矩阵和Jordan标准型

林亚南

厦门大学数学科学学院

ynlin@xmu.edu.cn

Jordan标准型

- 多项式理论
- 矩阵理论
- 线性空间
- 线性变换

思想方法

- 等价分类思想
- 直和分解思想
- 同构思想

内容处理

几何方法：张禾瑞，郝炳新《高等代数(第四版)》(1999)

丘维声《高等代数》(1996)

第一分解定理:线性空间分解成为根子空间的直和.

第二分解定理:根子空间分解成为循环子空间的直和.

代数方法：

北京大学数学系《高等代数(第二版)》(1978)

孟道骥《高等代数与解析几何(第二版)》(2004)

谢邦杰《线性代数》(1978)

谭宜家《高等代数与解析几何》(2001)

庄瓦金《高等代数教程》(2004)

秦松喜《高等代数新编》(2005)

λ矩阵–行列式因子–不变因子–初等因子–Jordan标准型

代数和几何的方法：

姚慕生《高等代数学》(2003)

王湘浩谢邦杰《高等代数》(1964)

陈昭木，陈清华等《高等代数》(1991)

李炯生，查建国《线性代数》(1989)

在复数域$\mathbb{C}$上讨论. 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,记$A$的特征多项式为$f_A(\lambda) := |\lambda I_n - A|$, A的最小多项式为$m_A(\lambda)$.

§ 1. $\lambda-$矩阵

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & \lambda + 3 \\ 1 & \lambda^3 + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda^3 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \lambda^2 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

定理：设$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, 则$A$与$B$相似的充分必要条件是$\lambda$–矩阵$\lambda I - A$与$\lambda I - B$相抵.

定理: 设$A(\lambda)$是一个n阶$\lambda-$矩阵, 则$A(\lambda)$相抵于对角阵(λ矩阵的法式)

$$\mathrm{diag}\{d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda), 0, \cdots, 0\},$$

其中$d_i(\lambda)$为非零的首一多项式, 且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), 1 \le i \le r-1.$

推论: 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则$\lambda I - A$相抵于

$$\mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)\},$$

其中$d_i(\lambda)$首一且$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda), 1 \le i \le k-1.$ 记$d_i(\lambda)$的次数为m_i.因为$f_A(\lambda) = d_1(\lambda)d_2(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$,故有$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$

§ 2. 行列式因子, 不变因子, 初等因子

定义: 设$A(\lambda)$是n阶$\lambda-$矩阵, 对$1 \leq k \leq n$, 如果$A(\lambda)$的所有k阶子式的最大公因式(首一)不等于零,则称这个多项式为$A(\lambda)$的k阶行列式因子,记为$D_k(\lambda)$.

定义: 设$D_1(\lambda), D_2(\lambda), \cdots, D_r(\lambda)$是$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$的行列式因子,则$g_1(\lambda) = D_1(\lambda), g_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda), \cdots, g_r(\lambda) = D_r(\lambda)/D_{r-1}(\lambda)$,称为$A(\lambda)$的不变因子.

设$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$是不变因子,

$$
\begin{aligned}
d_1(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{21}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{t1}} \\
d_2(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{12}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{t2}} \\
&\cdots \\
d_k(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{1k}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{2k}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{tk}}
\end{aligned}
$$

其中e_{ij}是非负整数,且$0 \le e_{i1} \le e_{i2} \le \cdots e_{ik},\ 1 \le i \le k.$

定义: 若上面分解式中的$e_{ij} > 0$,则称$(\lambda-\lambda_i)^{e_{ij}}$为$A(\lambda)$的一个初等因子, $A(\lambda)$的全体初等因子称为$A(\lambda)$的初等因子组.

定义: 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则称$\lambda I_n - A$的行列式因子(不变因子, 初等因子)为$A$的行列式因子(不变因子, 初等因子).

定理: 设$A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$,则下列条件等价.

(1) A与B相似;

(2) $\lambda I - A$和$\lambda I - B$相抵;

(3) A与B有相同的行列式因子;

(4) A与B有相同的不变因子;

(5) A与B有相同的初等因子组.

设$\lambda I - A \cong \mathrm{diag}\{1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_m(\lambda)\}$. 则

(1) A行列式因子为$1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_1(\lambda)d_2(\lambda), \cdots, d_1(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$;

(2) A不变因子为$1, \cdots, 1, d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$;

(3) A的特征多项式$f_A(\lambda)$为$d_1(\lambda)\cdots d_k(\lambda)$, 等于所有初等因子的乘积;

(4) A的最小多项式$m_A(\lambda)$为$d_k(\lambda)$.

§ 3. Jordan标准型

记r阶矩阵$J_{\lambda_0}=\begin{bmatrix}\lambda_0 & 1 & & \\ & \lambda_0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_0\end{bmatrix}$. 称为属于特征值$\lambda_0$的Jordan块.

J_{λ_0}的初等因子为$(\lambda-\lambda_0)^r$. 因子.

引理: 设J是分块对角阵

$$\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中每个J_i都是Jordan块, J_i的初等因子组为$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$, 则$J$的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{r_s}.$$

定理: 设$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$且$A$的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1}, (\lambda-\lambda_2)^{r_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{r_s}$$

则A相似于分块对角阵(Jordan标准型):

$$J = \begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中J_i为属于特征值λ_i的r_i阶Jordan块.

设$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_k(\lambda)$是不变因子,

$$
\begin{aligned}
d_1(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{21}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{t1}} \\
d_2(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{12}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{t2}} \\
&\cdots \\
d_k(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{e_{1k}}(\lambda-\lambda_2)^{e_{2k}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{e_{tk}}
\end{aligned}
$$

其中e_{ij}是非负整数,且$0 \le e_{i1} \le e_{i2} \le \cdots e_{ik}$, $1 \le i \le t$, $\sum_{1\le i\le t, 1\le j\le k} e_{ij} = n$.

(1) 属于特征值λ_i的Jordan小块的块数为$\{e_{ij}\}_{j=1}^k$中的非零个数，其中最大阶数是e_{ik}; 总阶数为$\sum_{j=1}^k e_{ij}$;

(2) 矩阵的Jordan标准型在不计Jordan块的排列次序的情况下是唯一确定的.

(3) Jordan小块是”最佳”的.

定理: 设φ是复数域上线性空间V上的线性变换, 则必存在V的一组基, 在这组基下φ的表示矩阵为Jordan阵.

§ 4. 若当标准型的进一步讨论

设φ是$\mathbb{C}$上n维线性空间V的线性变换,φ的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1},(\lambda-\lambda_2)^{r_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

则存在V的一组基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$,使得

$$\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{pmatrix},$$

其中J_s是相应于$(\lambda-\lambda_i)^{r_i}$的若当块.

令$V_1 = L(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{r_1})$,则

$$
(1) \quad \begin{aligned}
&\varphi(\xi_1) = \lambda_1 \xi_1, \\
&\varphi(\xi_2) = \lambda_1 \xi_2 + \xi_1, \\
&\cdots, \\
&\varphi(\xi_{r_1}) = \lambda_1 \xi_{r_1} + \xi_{r_1 - 1},
\end{aligned}
$$

故$\varphi(V_1) \subseteq V_1$,即$V_1$是$\varphi$-子空间. 进一步知$V_1$是$(\varphi - \lambda_1 I)$的循环子空间. 同理, 令$V_j = L(\xi_{t_j+1}, \xi_{t_j+2}, \cdots, \xi_{t_j+r_j}), t_j = r_1 + r_2 + \cdots + r_{j-1}$,即$V_j$对应若当块$J_j$,对应初等因子$(\lambda - \lambda_j)^{r_j}$, 则有

定理: 设φ是$\mathbb{C}$上n维空间V的线性变换,设φ的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{r_1}, (\lambda-\lambda_2)^{r_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_s)^{r_s},$$

则$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_s$, 这里$V_i$是维数为$r_i$的关于$(\varphi-\lambda_i I)$的循环子空间.

取V_1的基$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{r_1}$,

$$\varphi|_{V_1}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{r_1})=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r)\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{pmatrix}_{r_1}.$$

引理: (1) V_1中包含ξ_{r_1}的φ-子空间只有V_1本身.

(2) V_1的任意φ-子空间均包含ξ_1.

(3) V_1不能分解成为两个非平凡的φ-子空间的直和.

命题:设$V=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_k$, V_i是$(\varphi-\lambda_i I)$的循环子空间, 则V_i不可分解为两个非平凡的φ-子空间的直和.

定理: 设φ是$\mathbb{C}$上n维线性空间V的线性变换,φ的不同特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$,则

$$V = R(\lambda_1) \oplus R(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus R(\lambda_t)$$

其中$R(\lambda_i)$是λ_i的根子空间,即

$$R(\lambda_i) = \{v \in V | (\varphi - \lambda_i I)^{e_{ik}}(v) = 0\},$$

$\dim R(\lambda_i) = \sum_{j=1}^{k} e_{ij}$($\lambda_i$的代数重数), $R(\lambda_i)$可表为若干个循环子空间的直和.

记λ_1为φ的特征根,$V_{\lambda_1}=\{v\in V|\varphi(v)=\lambda_1 v\}$是$\lambda_1$的特征子空间,显然有$V_{\lambda_1}\subseteq R(\lambda_1)=V_1\oplus\cdots\oplus V_{s_1}$, 那么$V_{\lambda_1}$在哪里呢?

因为V_1是φ-子空间,记$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{r_1}$是$V_1$的循环基:

$$\varphi|_{V_1}(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{r_1})=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{r_1})\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_1\end{pmatrix}_{r_1}$$

易知$\xi_1\in V_{\lambda_1}$,又因为$r(\lambda_1 I-J_{\lambda_1})=r_1-1$, 所以$V_1$中只有一个线性无关的特征向量. 同理,$V_j,1\le j\le s_1$, 中只有一个线性无关特征向量.

又因为

$$\lambda_1 I - J = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} - J_1 & & & \\ & \lambda_1 I_{r_2} - J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_1 I_{r_k} - J_k \end{pmatrix},$$

故$r(\lambda_1 I - J) = r_1 + r_2 + \cdots + r_k - s_1 = n - s_1$,所以$\dim V_{\lambda_1} = s_1$.

引理:φ的若干标准形中属于特征值λ_i的若当块的个数等于λ_i的特征子空间的维数(λ_i的几何重数).

设λ_1是φ的特征值.

$$R(\lambda_1)=V_1\oplus V_2\oplus\cdots\oplus V_{s_1},\quad \dim R(\lambda_1)=\sum_{j=1}^{k}e_{1j}.$$

为方便，记$l:=e_{ik}$.

$$R(\lambda_1)=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^l\neq \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^{l-1}.$$

$$\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^1\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^2\subseteq\cdots\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^l\subseteq \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^{l+1}\subseteq\cdots$$

记属于λ_1的一阶Jordan小块个数为c_1, 属于λ_1的二阶Jordan小块的个数为$c_2,\cdots$,属于λ_1的l阶Jordan小块个数为c_l. 记$b_1=\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)$, $b_2=\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^2,\cdots,b_l=\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^l$.

则有

$$b_1 = c_1 + c_2 + \cdots + c_l,$$

$$b_2 = c_1 + 2(c_2 + \cdots + c_l),$$

$$b_3 = c_1 + 2c_2 + 3(c_3 + \cdots + c_l),$$

$$\cdots$$

$$b_{l-1} = c_1 + 2c_2 + \cdots + (l-2)c_{l-2} + (l-1)(c_{l-1} + c_l),$$

$$b_l = c_1 + 2c_2 + \cdots + (l-1)c_{l-1} + lc_l.$$

得到

$$\begin{cases} c_1 = 2b_1 - b_2 \\ c_2 = 2b_2 - b_1 - b_3 \\ c_3 = 2b_3 - b_2 - b_4 \\ \cdots \\ c_{l-1} = 2b_{l-1} - b_{l-2} - b_l \\ c_l = b_l - b_{l-1} \end{cases}$$

定理:设λ_1是φ的特征值, $R(\lambda_1)=\mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^l \neq \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^{l-1}$,记属于$\lambda_1$的$j$阶若当小块的个数为$c_j, 1\le j\le l$.则

$$\begin{cases} c_1 = 2\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)-\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^2 \\ c_j = 2\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^j-\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^{j-1}-\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^{j+1} \\ \qquad\qquad 2\le j\le l-1 \\ c_l = \dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^l-\dim \mathrm{Ker}(\varphi-\lambda_1 I)^{l-1} \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} c_1 = n+r(A-\lambda_1 I)^2-2r(A-\lambda_1 I) \\ c_j = r(A-\lambda_1 I)^{j-1}+r(A-\lambda_1 I)^{j+1}-2r(A-\lambda_1 I)^j \quad 2\le j\le l \\ c_l = r(A-\lambda_1 I)^{l-1}-r(A-\lambda_1 I)^l \end{cases}$$

推论: 设φ是$\mathbb{C}$上n维线性空间V的线性变换, φ的不同特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$. 则下列条件等价.

φ可对角化;

$\Leftrightarrow$ φ有n个线性无关的特征向量;

$\Leftrightarrow$ φ的根子空间等于φ的特征子空间;

$\Leftrightarrow$ λ_i的代数重数等于几何重数, $\forall i$;

$\Leftrightarrow$ $r(\lambda_i I - \varphi) = r((\lambda_i I - \varphi)^2), \forall i$;

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(\lambda_i I - \varphi) = \mathrm{Im}(\lambda_i I - \varphi)^2, \forall i$;

$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}(\lambda_i I - \varphi) = \mathrm{Ker}(\lambda_i I - \varphi)^2, \forall i$;

$\Leftrightarrow$ φ的Jordan块都是一阶的;

$\Leftrightarrow$ φ的初等因子全是一次的;

$\Leftrightarrow$ φ的所有不变因子无重根;

$\Leftrightarrow$ $m_\varphi(\lambda)$无重根;

$\Leftrightarrow$ $(m_\varphi(\lambda), m'_\varphi(\lambda)) = 1$.

Jordan标准型另外推导方法

主理想整环上模论方法：龚升《线性代数五讲》(2005)

谢　谢!